

Комбинаторика. Подсчёт и перебор

Задачи для 4–6 классов

Содержание

1	Как организовать перебор	2
2	Дерево возможностей	5
3	Разбить случаи на группы	9
4	Правила сложения и умножения	11
5	Посчитать ненужное	13
6	Разбить на пары	15
7	Разные задачи	17
8	Ответы	25

1. Как организовать перебор

При переборе важно рассмотреть все возможные варианты и не посчитать ни один дважды. Поэтому варианты удобно перечислять по определённому правилу: например, по первой цифре числа, по положению фигуры или с помощью таблицы. Такой перебор называется **полным и упорядоченным**.

Гардероб

У футболки нет карманов, у рубашки один карман, у толстовки два кармана. У брюк два кармана, у шорт три кармана, у джинсов пять карманов.

Даня выбирает один предмет верха и один предмет низа. Рубашку он носит только с брюками, а брюки не носит с толстовкой.

а) Сколько карманов может быть на его одежде? Приведите все варианты.

б) Сколько существует способов одеться так, чтобы было хотя бы 4 кармана?

Решение.

Нарисуем таблицу. В столбцах запишем варианты верха, а в строках — варианты низа.

Зачеркнём запрещённые сочетания, а в остальных клетках запишем общее количество карманов.

Получаем возможные количества карманов:

2, 3, 5, 7.

	Ф(0)	Р(1)	Т(2)
Б(2)	2	3	
Ш(3)	3		5
Д(5)	5		7

Хотя бы 4 кармана получается в трёх случаях.

Точки на окружности

На окружности отметили 10 точек и пронумеровали их по порядку от 1 до 10. Затем каждые две точки соединили отрезком.

Сколько из этих отрезков пересекают во внутренней точке отрезок с концами в точках 3 и 7?

Решение.

Точки 3 и 7 делят окружность на две дуги. На одной из них лежат точки 4, 5, 6, а на другой — точки 1, 2, 8, 9, 10.

Отрезок пересекает отрезок 3–7 внутри круга тогда и только тогда, когда один его конец лежит на одной дуге, а другой — на другой.

Первый конец можно выбрать 3 способами, а второй — 5 способами. Получаем

$$3 \cdot 5 = 15$$

отрезков.

Непростые простые

Учитель задал пятиклассникам задачу.

Ваня получил ответ 9. Дима считает, что ответ — простое число. Катя утверждает, что ответ — чётное число. У Лены получился ответ 15.

Учитель сказал, что из двух мальчиков прав только один и из двух девочек права только одна.

Каков правильный ответ на задачу?

Решение.

Рассмотрим четыре возможные пары верных утверждений: одно утверждение мальчика и одно утверждение девочки.

	9 (Ваня)	прост. (Дима)
чёт. (Катя)		
15 (Лена)		

Остаётся единственная возможность: правильный ответ одновременно чётный и простой.

Единственное такое число — 2.

Без негатива

Сколько на рисунке таких прямоугольников, внутри которых есть хотя бы один «+», но нет ни одного «—»?

—		+	
			—
	+		

Решение.

У каждого прямоугольника есть единственная левая верхняя клетка. Поэтому будем перебирать прямоугольники по этой клетке.

Для примера обозначим клетки верхней строки буквами А, Б, В, Г:

А	Б	В	Г
—		+	
			—
	+		

Для клетки А подходящих прямоугольников нет.

Для клетки Б их пять:

	Б		
—		+	
			—
	+		

	Б		
—		+	
			—
	+		

	Б		
—		+	
			—
	+		

	Б		
—		+	
			—
	+		

	Б		
—		+	
			—
	+		

Для клетки В их четыре:

		В	
-		+	
			-
	+		

		В	
-		+	
			-
	+		

		В	
-		+	
			-
	+		

		В	
-		+	
			-
	+		

Для клетки Г подходящих прямоугольников нет.

Проделаем то же самое для остальных клеток и запишем в каждой клетке полученное количество:

0	5	4	0
0	5	4	0
2	2	0	0
3	3	0	0

Складываем числа:

$$5 + 4 + 5 + 4 + 2 + 2 + 3 + 3 = 28.$$

2. Дерево возможностей

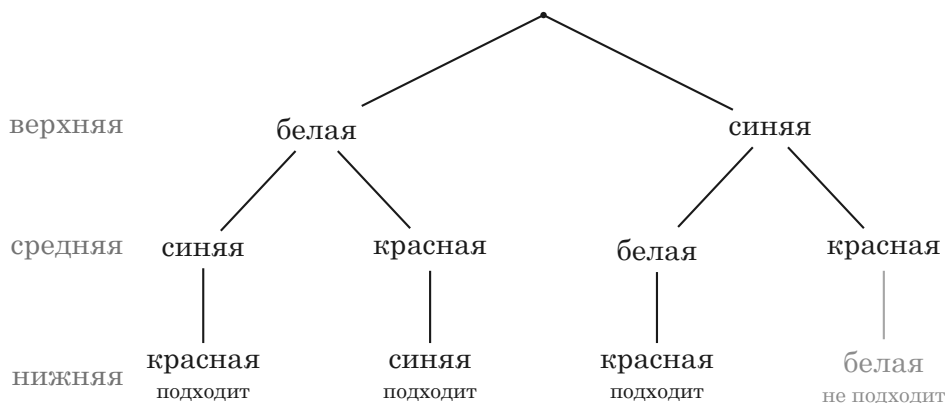
Иногда варианты удобно просто выписать. Но если выбор происходит в несколько шагов, в списке легко что-нибудь пропустить или, наоборот, посчитать дважды. Начнём с примера.

Флаг

Никита хочет нарисовать российский флаг, но он забыл, как в точности выглядит флаг. Помнит только, что должно быть три горизонтальные полосы: красная, синяя, белая. При этом верхняя полоса не красная, а нижняя не белая. Сколько разных флагов подходят под это описание?

Решение.

Будем выбирать цвета по порядку, начиная с верхней полосы. Для верхней полосы есть только два варианта: белая или синяя. После каждого выбора посмотрим, что можно поставить дальше.



Каждый путь от верхней точки до нижнего слова описывает один вариант флага. Подходящих путей три.

Дерево возможностей помогает перечислить все варианты и не забыть ни одного. Каждая ветвь показывает один возможный выбор на очередном шаге, а каждый путь от начала дерева до его конца соответствует одному варианту.

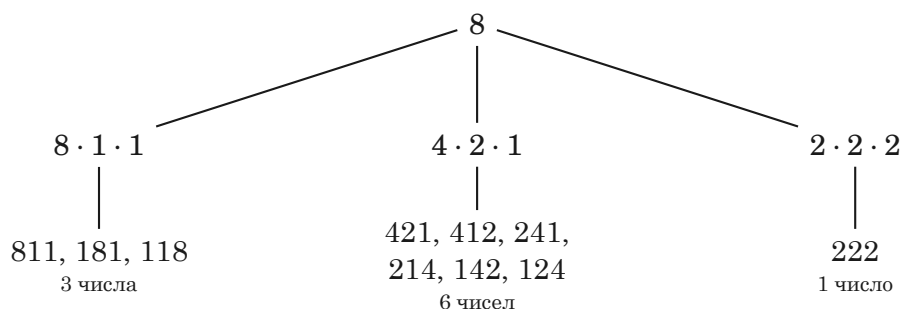
Как строить дерево возможностей. Сначала нарисуем все варианты первого выбора. Из конца каждой ветви — все варианты следующего выбора. Продолжаем, пока выборы не закончатся.

Произведение цифр

Сколько существует трёхзначных чисел, произведение цифр которых равно 8?

Решение.

Сначала забудем о порядке цифр. Есть три способа получить 8 произведением трёх цифр:



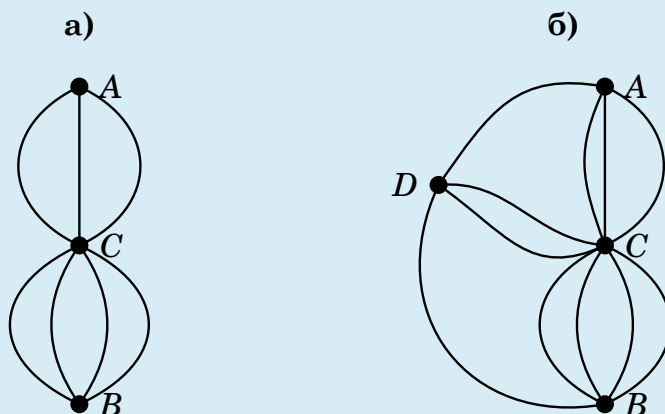
В трёх ветвях получилось соответственно 3, 6 и 1 число. Поэтому всего

$$3 + 6 + 1 = 10.$$

Ветви дерева не обязаны быть одинаковыми. Если разные первые выборы дают разное количество продолжений, удобно посчитать варианты в каждой большой ветви отдельно, а затем сложить.

Маршруты

Сколько путей ведут из A в B ? Все дороги односторонние.



Решение.

а) Сначала выбираем одну из трёх дорог из A в C . После каждого такого выбора есть четыре дороги из C в B . Значит,

$$3 \cdot 4 = 12.$$

б) Здесь пути бывают трёх типов, в зависимости от того, через какие города мы проезжаем:

маршрут	число способов
ADB	1
$ADCB$	$1 \cdot 2 \cdot 4 = 8$
ACB	$3 \cdot 4 = 12$

Складываем три непересекающихся случая:

$$1 + 8 + 12 = 21.$$

Правило умножения. Если первый выбор можно сделать m способами, и после каждого из них второй выбор можно сделать n способами, то два последовательных выбора можно сделать

$$m \cdot n$$

способами.

На дереве это видно особенно хорошо: от каждой из m первых ветвей отходит ещё по n ветвей.

Делители неизвестного числа

Сколько делителей есть у числа $2^3 \cdot 5^2$?

Решение.

Любой делитель этого числа имеет вид

$$2^a \cdot 5^b,$$

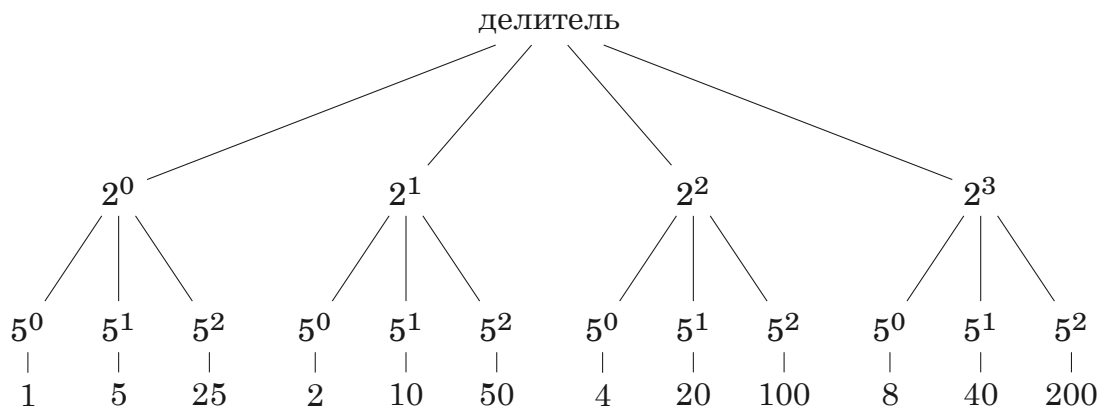
где степень двойки можно выбрать четырьмя способами:

$$a = 0, 1, 2, 3,$$

а степень пятёрки — тремя:

$$b = 0, 1, 2.$$

Эти два выбора независимы друг от друга. Их можно увидеть на дереве:

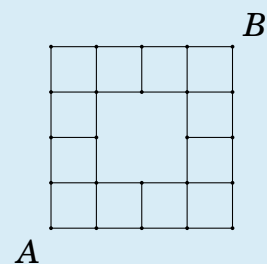


Для степени двойки есть 4 варианта, а для степени пятёрки — 3. По правилу умножения получаем

$$4 \cdot 3 = 12.$$

Тропы

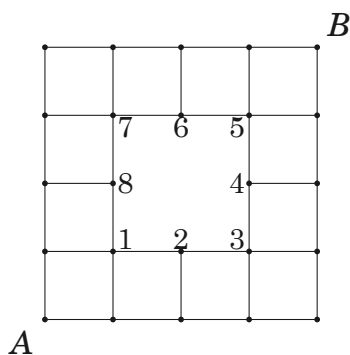
Муравей хочет добраться от точки A до точки B за 8 шагов. За один шаг можно пройти от одной точки до соседней точки по отрезку. Сколькими способами он может это сделать?



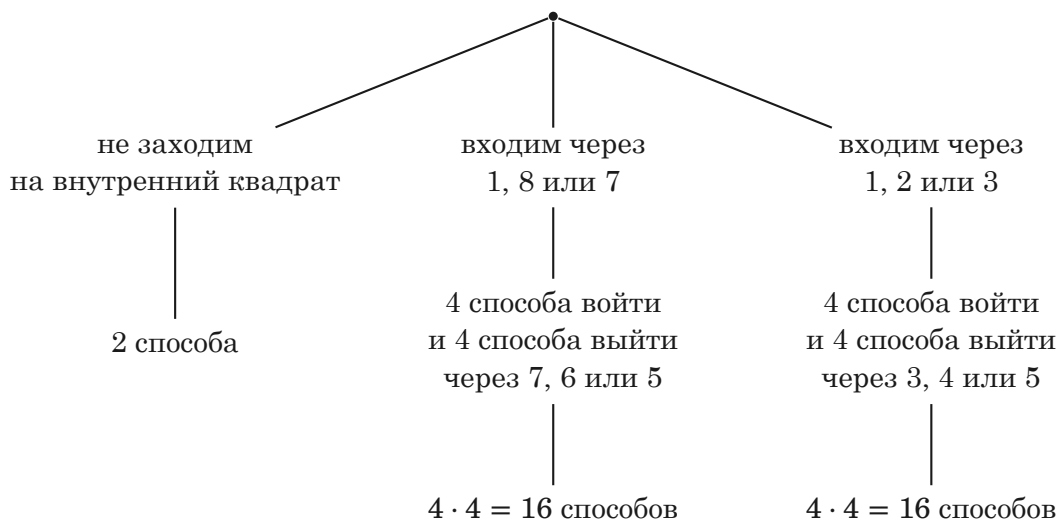
Решение.

Любой путь из A в B длины 8 всё время движется вправо или вверх. Главное различие между путями — что происходит около внутреннего квадрата.

Пронумеруем точки на его границе:



Разобьём все маршруты на три группы.



В первой группе 2 маршрута. Во второй и третьей группах выбор входа и выбор выхода независимы, поэтому в каждой из них по $4 \cdot 4 = 16$ маршрутов.

Итого

$$2 + 16 + 16 = 34.$$

3. Разбить случаи на группы

Как придумать правило, по которому удобно вести перебор? Часто именно в этом и заключается смысл задачи.

Если подходящее правило сразу не видно, можно просто начать выписывать варианты. Например, если нужно посчитать числа с некоторым свойством, можно выписывать их начиная с самого маленького; если речь идёт о расположении фигур на доске — по очереди ставить фигуру в разные клетки; если нужно считать отрезки — начать перечислять их.

Постепенно можно заметить, что варианты естественно разбиваются на группы. Числа, например, можно разделить по первой или последней цифре; клетки доски — на угловые, лежащие у стороны и внутренние; отрезки — по их концам, например выделить все отрезки с концом в точке A , затем с концом в точке B и так далее. Выделить такие группы — это первый шаг к построению дерева возможностей.

Чётные небольшие

Сколько существует трёхзначных чётных чисел, составленных из цифр 0, 1, 2, 3, 4? (Цифры в числе не могут повторяться.)

Решение.

Разделим числа на группы с одинаковой последней цифрой. Она может быть 0, 2 или 4.

Если последняя цифра 2, то на первое место можно поставить 3 цифры (кроме 0 и 2), на второе 3 цифры (кроме 2 и той, что уже стоит на первом месте). Всего $3 \cdot 3 = 9$ вариантов.

Если последняя цифра 4, то вариантов также 9.

Если последняя цифра 0, то вариантов $4 \cdot 3 = 12$.

Всего $9 + 9 + 12 = 30$ чисел.

Сумма цифр 13

Сколько существует трёхзначных чисел, которые делятся на 25, а сумма их цифр равна 13?

Решение.

Разделим числа на группы с одинаковыми последними двумя цифрами. Число, которое делится на 25, может оканчиваться на 00, 25, 50 или 75.

Если число оканчивается на 00, то первая цифра должна быть равна 13. Это невозможно.

Если число оканчивается на 25, то первая цифра равна $13 - 2 - 5 = 6$. Получаем число 625.

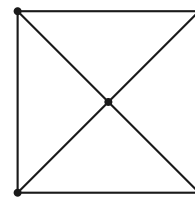
Если число оканчивается на 50, то первая цифра равна $13 - 5 - 0 = 8$. Получаем число 850.

Если число оканчивается на 75, то первая цифра равна $13 - 7 - 5 = 1$. Получаем число 175.

Всего 3 числа.

В поисках красного треугольника

На рисунке 5 точек соединены 8 отрезками. Сколько существует способов закрасить 4 отрезка красным цветом так, чтобы нашёлся треугольник с красными сторонами?



Решение.

На рисунке есть два типа треугольников:

- треугольник из трёх отрезков, и ещё какой-то один отрезок закрашен;
- треугольник из четырёх отрезков (половина квадрата).

Красный треугольник относится либо к одному типу, либо к другому. Поэтому посчитаем количество раскрасок каждого типа и сложим их.

Первый тип. Маленьких треугольников 4, и для каждого ещё один отрезок можно выбрать 5 способами. Всего 20 способов.

Второй тип. Больших треугольников 4.

Всего 24 способа выбрать 4 отрезка и получить треугольник.

Нейтралитет

Сколько есть способов поставить на доске 5×5 чёрного и белого королей так, чтобы они не били друг друга?

Решение.

Будем ставить чёрного короля в каждую клетку и считать, сколько клеток остаётся для белого. Клетки доски делятся на три группы.

Если чёрный король стоит в угловой клетке, для белого запрещены эта клетка и ещё 3 соседние. Значит, ему подходит $25 - 4 = 21$ клетка. Угловых клеток 4, поэтому получаем $4 \cdot 21 = 84$ расстановки.

Если чёрный король стоит у стороны, но не в углу, для белого запрещены 6 клеток. Значит, ему подходят $25 - 6 = 19$ клеток. Таких клеток 12, поэтому получаем $12 \cdot 19 = 228$ расстановок.

Если чёрный король не у края, для белого запрещены 9 клеток. Значит, ему подходят $25 - 9 = 16$ клеток. Таких клеток 9, поэтому получаем $9 \cdot 16 = 144$ расстановки.

Всего расстановок $84 + 228 + 144 = 456$.

4. Правила сложения и умножения

Дерево возможностей не всегда нужно рисовать: это долго и занимает много места. Часто достаточно мысленно представить, как оно устроено. Разбиваем все случаи на удобные группы, а затем для каждой группы считаем, сколько вариантов она даёт.

Морской бой

У Васи и Пети в неделю 4 урока русского языка, 3 урока технологии и 2 урока музыки. В последнюю учебную неделю на некоторых из этих уроков они решили сыграть в морской бой.

- а) Сколькими способами можно выбрать один урок, на котором они будут играть?
- б) Сколькими способами можно сыграть три боя, пропустив по одному уроку каждого предмета?
- в) Сколькими способами можно сыграть два боя, пропустив два урока какого-то одного предмета?

Решение.

- а) Всего есть $4 + 3 + 2 = 9$ уроков, поэтому выбрать один из них можно 9 способами.
- б) Урок русского языка можно выбрать 4 способами, урок технологии — 3 способами, урок музыки — 2 способами. Всего $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ способа.
- в) Если пропустить два урока русского языка, есть 6 вариантов: 12, 13, 14, 23, 24, 34. Для технологии есть 3 варианта: 12, 13, 23. Для музыки — один вариант: 12. Всего $6 + 3 + 1 = 10$ способов.

Что почитать

На полке стоят 4 приключенческие книги, 3 детектива и 2 книги о животных. Все книги разные.

Сколькими способами можно выбрать две книги разных жанров?

Решение.

- Разобьём варианты на три группы по жанрам выбранных книг.
- Приключенческую книгу и детектив можно выбрать $4 \cdot 3 = 12$ способами.
- Приключенческую книгу и книгу о животных — $4 \cdot 2 = 8$ способами.
- Детектив и книгу о животных — $3 \cdot 2 = 6$ способами.
- Всего $12 + 8 + 6 = 26$ способов.

Неоднозначность

Сколькими способами можно вырезать из доски 8×10 прямоугольник из 4 клеток?

Решение.

Такой прямоугольник может иметь размеры 1×4 или 2×2 .

Прямоугольник 1×4 можно расположить горизонтально или вертикально. Горизонтальных прямоугольников $10 \cdot 5 = 50$, а вертикальных $8 \cdot 7 = 56$.

Для квадрата 2×2 можно выбрать его левую верхнюю клетку 7 способами по горизонтали и 9 способами по вертикали. Получаем $7 \cdot 9 = 63$ квадрата.

Всего $50 + 56 + 63 = 169$ прямоугольников.

О, театр

Режиссёр с мировым именем Фёдор хочет расставить на сцене в ряд трёх мальчиков и трёх девочек так, чтобы мальчики и девочки чередовались. Сколькими способами это можно сделать? Все дети различны.

Решение.

Способ I. самого левого ребёнка можно выбрать 6 способами. После этого пол ребёнка на каждом следующем месте уже определён. Второго ребёнка можно выбрать 3 способами, третьего — 2 способами, четвёртого — 2 способами, а последние двое определяются однозначно.

Всего $6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 72$ расстановки.

Способ II. Сначала выберем, кто стоит слева — мальчик или девочка. Это можно сделать 2 способами. Мальчиков можно расставить на их трёх местах $3!$ способами, и независимо от них девочек — ещё $3!$ способами.

Всего $2 \cdot 3! \cdot 3! = 72$ расстановки.

5. Посчитать ненужное

Иногда проще посчитать те варианты, которые **не подходят**. А затем вычесть их количество из количества всех вариантов.

Разные цифры

У скольких чисел от 1 до 2026 в записи есть хотя бы две различные цифры?

Решение.

Посчитаем лишние числа — те, у которых нет различных цифр. Иными словами, все цифры у них одинаковы.

Однозначных таких чисел 9: 1, 2, ..., 9.

Двузначных — 9: 11, 22, ..., 99.

Трёхзначных — 9: 111, 222, ..., 999.

Из четырёхзначных подходит только 1111, потому что $2222 > 2026$.

Всего лишних чисел $9 + 9 + 9 + 1 = 28$.

Значит, нужных чисел $2026 - 28 = 1998$.

Синий куб

Из 1000 одинаковых маленьких кубиков сложили куб $10 \times 10 \times 10$ и покрасили его снаружи синей краской.

У скольких маленьких кубиков есть хотя бы одна синяя грань?

Решение.

Вместо окрашенных кубиков посчитаем неокрашенные.

Не имеют ни одной синей грани только кубики, которые находятся внутри большого куба (их не видно снаружи). Если убрать внешний слой, останется куб $8 \times 8 \times 8$. Поэтому неокрашенных кубиков $8^3 = 512$.

Всего маленьких кубиков 1000, значит, хотя бы одна синяя грань есть у $1000 - 512 = 488$ кубиков.

Взрыв-Инатор

Хайнц Фуфелшмерц в детстве ужасно страдал оттого, что на его днях рождения не было фейерверка! Поэтому он изготовил Взрыв-Инатор, чтобы устраивать фейерверки хоть каждый день. Для его работы нужно закинуть в колбу ровно четыре компонента: дистиллированную воду, серную кислоту, гранулы цинка и — исключительно для зловещей красоты — метиловый оранжевый! Опытным путём он вывел главное правило химии: если влить воду сразу после концентрированной кислоты, то Инатор взорвётся немедленно. И Фуфелшмерц, злобный гений, станет частью фейерверка, как какое-нибудь конфетти! Сколько есть безопасных способов закинуть эти четыре компонента в колбу так, чтобы вода ни в коем случае не шла следом за серной кислотой?

Решение.

Сначала посчитаем все способы добавить четыре компонента. Их

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Теперь посчитаем опасные способы. В них кислота и вода идут подряд, причём сначала кислота, а сразу за ней вода.

Будем считать пару «кислота — вода» одним целым. Тогда нужно расположить три объекта: эту пару, цинк и метиловый оранжевый. Это можно сделать

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

способами.

Значит, безопасных способов

$$24 - 6 = 18.$$

Взаимно простые

Из чисел $1, 2, \dots, 99$ Вера вычеркнула все числа, взаимно простые с 99. Сколько чисел она вычеркнула?

Решение.

Посчитаем числа, которые Вера не вычеркнула.

Так как

$$99 = 9 \cdot 11,$$

число не взаимно просто с 99, если оно делится на 3 или на 11.

Среди чисел от 1 до 99 на 3 делятся 33 числа, а на 11 — 9 чисел. Но числа, которые делятся и на 3, и на 11, мы посчитали дважды. Это числа, делящиеся на 33, их 3.

Значит, Вера не вычеркнула

$$33 + 9 - 3 = 39$$

чисел.

Всего было 99 чисел, поэтому она вычеркнула

$$99 - 39 = 60$$

чисел.

6. Разбить на пары

Если нужно сравнить две группы, иногда можно не считать количество элементов в каждой из них отдельно. Удобнее разбить элементы на пары, сопоставив каждому элементу одной группы элемент другой группы. Если все элементы разбились на пары, то группы равны по размеру. Если некоторые элементы остались без пары, именно они показывают, какая группа больше.

Точки на окружности

На окружности отмечены 12 точек и проведены все хорды с концами в этих точках. Чего больше: четырёхугольников с вершинами в отмеченных точках или пар хорд, пересекающихся внутри круга?

Решение.

Каждому четырёхугольнику сопоставим пару его диагоналей. Они пересекаются внутри круга.

И наоборот, две хорды, пересекающиеся внутри круга, имеют четыре различных конца. Эти четыре точки образуют четырёхугольник, а хорды являются его диагоналями.

Значит, четырёхугольники и пары пересекающихся хорд можно разбить на пары. Их поровну.

Нейтралитет

Сколько есть способов поставить на доске 5×5 двух чёрных королей так, чтобы они не били друг друга?

Решение.

Раньше мы считали расстановки чёрного и белого королей и получили 456 способов. Каждой расстановке двух чёрных королей соответствуют две такие расстановки: можно считать первого короля чёрным, а второго белым или наоборот.

Значит, расстановок двух одинаковых чёрных королей в 2 раза меньше:

$$456 : 2 = 228.$$

Сумма цифр одинакова

Каких трёхзначных чисел с суммой цифр 7 больше: чётных или нечётных?

Решение.

Каждому нечётному числу сопоставим чётное: уменьшим последнюю цифру на 1, а цифру десятков увеличим на 1. Например,

$$421 \leftrightarrow 430, \quad 313 \leftrightarrow 322, \quad 115 \leftrightarrow 124.$$

Сумма цифр при этом не меняется.

Обратно, у чётного числа можно уменьшить цифру десятков на 1, а последнюю цифру увеличить на 1. Это невозможно только тогда, когда цифра десятков равна 0.

Таких чётных чисел четыре:

106, 304, 502, 700.

Все остальные числа разбиваются на пары, в каждой из которых одно число чётное, а другое нечётное. Значит, чётных чисел на 4 больше.

7. Разные задачи

1. Игрушечная расстановка (4 кл.)

У Гриши есть пять игрушек: слон, жираф, крокодил, зебра, горилла.

а) Сколькими способами он может поставить их в ряд?

б) А если Гриша хочет, чтобы первым стоял либо крокодил, либо горилла?

2. Ритуалы (4 кл.)

В книжке есть две сказки, три рассказа и четыре потешки. Маленькая Настя, укладываясь спать, хочет послушать:

а) один рассказ, одну сказку, одну потешку;

б) одно любое произведение;

в) два произведения разных жанров.

Сколько вечеров подряд мама сможет придумывать для Насти новый набор произведений?

3. Числа по кругу (4 кл.)

Сколькими способами можно расставить по кругу числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 так, чтобы произведение любой пары соседних чисел в круге было не больше 20?

4. Несколько простых вопросов (4 кл.)

А. Сколькими способами три мальчика и две девочки могут выстроиться в очередь?

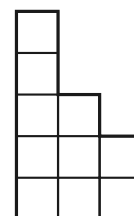
Б. Сколько есть способов поставить в ряд трёх мальчиков и двух девочек, если мальчики хотят стоять вместе слева, а девочки — вместе справа?

В. У Кости есть игрушечные машинки: три грузовика и две легковые. Сколько есть способов выставить в ряд либо грузовики, либо легковые?

Г. Сколько есть способов закрасить 2 клетки в полоске 1×3 ?

5. Лесенки (4–5 кл.)

Сколько существует лесенок из 10 клеток, в которых следующая ступенька ниже предыдущей? В лесенке должно быть хотя бы две ступеньки. Пример лесенки на рисунке справа.



6. Ближайшая дата (4–5 кл.)

Однажды электронный календарь показал дату: 27.08.2026. Какая ближайшая дата в будущем будет записана этими же восемью цифрами?

7. Купюры (4–5 кл.)

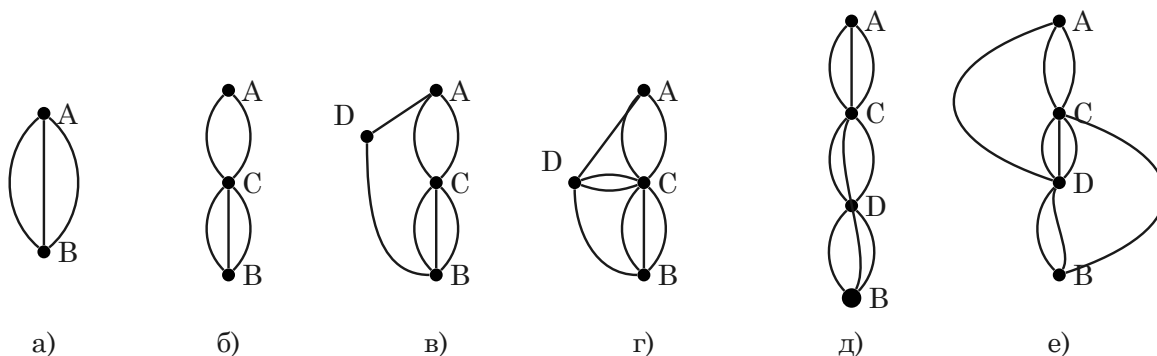
У Клары в кошельке есть купюры по 100, 200 и 500 рублей. Купюр каждого вида достаточно много. Сколькими способами она может заплатить 1500 рублей?

8. Уменьшить сумму (4–5 кл.)

Миша составил четырёхзначное, трёхзначное и двузначное число, используя при этом 9 различных цифр так, чтобы сумма этих трёх чисел была минимальной из возможных. Сколькими способами Миша может составить такие числа?

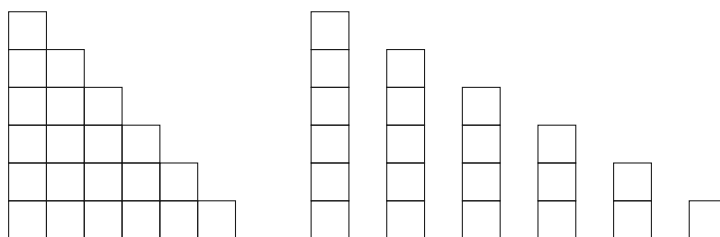
9. Маршруты (4–5 кл.)

Сколько есть способов добраться из A в B ? Двигаться можно только сверху вниз.



10. Разрезания (4–5 кл.)

Сколько существует способов разрезать лесенку высотой 6 клеток на пять прямоугольников и один квадрат? Лесенка, все прямоугольники и квадрат изображены ниже.



11. Комб-Инатор (4–5 кл.)

Фуфелшмерц установил пароль на новый Уничтожитель-Триштатья-Инатор. Агент Пи знает, что в нём:

- использовано ровно пять цифр 1, 2, 3, 4, 5;
- последняя цифра чётна.

Сколько паролей нужно перебрать агенту, чтобы разблокировать Инатор?

12. Витрина (4–5 кл.)

В кондитерской на витрину нужно выложить в один ряд 6 пирожных: 3 одинаковых эклера, 2 одинаковые картошки и 1 корзиночку. Сколькими способами можно это сделать?

13. Хоровод (4–5 кл.)

По легенде, в первый день лета шесть русалок встают в хоровод. Во второй — по-новому, и так далее. Лето длится до тех пор, пока хоровод не повторится. Сколько дней может быть в самом длинном лете? (Хоровод повторяется, если у

каждой русалки та же соседка справа и та же соседка слева.)

14. Ссора (4–5 кл.)

Шесть пиратов делят клад за круглым столом. Двое из них, Одноногий Джон и Слепой Пью, сильно поссорились из-за золотой монеты, и капитан теперь опасается сажать их рядом. Сколькими способами капитан может рассадить этих шестерых пиратов за круглым столом так, чтобы Джон и Пью не оказались соседями?

15. Парк развлечений (4–5 кл.)

В парке развлечений Финеса и Фербса есть 3 сверхгалактические карусели, 4 водные катапульты и 5 антигравитационных батуты. Прокатиться бесплатно можно только на двух аттракционах, причём они должны быть разных видов. Сколькими способами можно выбрать эти два аттракциона?

16. Нейтралитет (4–5 кл.)

Сколькими способами можно поставить на доску 4×4 :

а) чёрную и белую ладью;

б) две чёрные ладьи,

так, чтобы они не били друг друга?

Примечание. Чёрная и белая ладьи различимы. Если чёрная стоит на $A1$, белая на $A2$ — это одна расстановка. Если белая на $A1$, чёрная на $A2$ — другая. Если же переставлять чёрные ладьи между клетками $A1$ и $A2$, расстановка останется той же.

17. Волшебная лавка (4–5 кл.)

В волшебной лавке продаётся 9 зелий невидимости, 13 зачарованных амулетов и 5 свитков с заклинаниями. Кроме этого, есть ещё 4 набора «свиток и амулет» и 5 наборов «зелье и амулет». Сколькими способами маг может купить три разных предмета: зелье, амулет и свиток?

18. Шотландия (4–5 кл.)

Дана белая клетчатая таблица 5×5 . Сколькими способами можно закрасить одну её клетку в красный цвет, а другую — в зелёный так, чтобы красная и зелёная клетки находились в разных столбцах и в разных строках?

19. Трансформация (4–5 кл.)

У двузначного числа AB первую цифру увеличили на 1, а вторую — на 4 (при этом, например, цифру 9 нельзя увеличить на 4). В результате произведение цифр получившегося числа в три раза больше, чем произведение $A \cdot B$. Найдите число AB . Укажите все варианты.

20. Самая простая раскраска (4–5 кл.)

Сколько есть способов раскрасить полоску длиной 5 клеток в чёрный и белый цвета так, чтобы не нашлось трёх подряд идущих клеток одного цвета?

21. Нарядно (4–5 кл.)

Воспитательница украшает к празднику квадратный зал. У неё есть сколько угодно шариков трёх цветов: красного, жёлтого и зелёного. Воспитательница хочет в каждый угол зала поместить один шарик так, чтобы соседние шарики не были одинакового цвета.

Сколько есть способов это сделать?

22. Как устроен забор (4–6 кл.)

Сколько квадратных дырок в заборе, сколоченном из 2026 чёрных досок и 2026 серых? Часть забора не видна из-за здания.



23. Убрать лишнее (4–6 кл.)

Сколько существует таких пятизначных чисел, из которых можно вычеркнуть одну цифру и получить число 1514?

24. Убыватели (4–6 кл.)

Сколько есть трёхзначных чисел, в которых цифры расположены в порядке убывания?

25. Задачи про числа (4–6 кл.)

- а) Сколько существует пятизначных чисел, все цифры которых различны и нечётны?
- б) Сколько существует пятизначных чисел, все цифры которых различны и чётны?
- в) Сколько существует пятизначных чисел, в десятичной записи которых встречается каждая из цифр 2, 3, 4, 6, 9, причём последняя цифра чётна?
- г) Найдите количество четырёхзначных чисел, у которых цифра в разряде сотен на 3 меньше цифры в разряде единиц.
- д) Найдите количество четырёхзначных чисел, у которых цифра в разряде сотен на 3 меньше цифры в разряде единиц, а цифра в разряде тысяч на 3 меньше цифры в разряде десятков.

26. Тысяча и один куб (4–6 кл.)

Из тысячи белых кубиков сложили куб $10 \times 10 \times 10$ и покрасили его снаружи синей краской. У скольких кубиков:

- а) ровно одна грань синяя;
- б) есть хоть одна синяя грань?

27. Числа с повторами (4–6 кл.)

У скольких чисел от 1 до 1000 в записи есть хотя бы две одинаковые цифры?

28. Идеальная мизансцена (4–6 кл.)

- а) Режиссёр школьного спектакля хочет выстроить учеников (четырёх мальчиков и трёх девочек) в ряд так, чтобы мальчики и девочки чередовались. Чтобы точно выбрать лучшую расстановку, он решил попробовать все варианты. Сколько их?
- б) Вася, узнав о планах режиссёра, устал и ушёл домой. Остались три мальчика и три девочки. Сколько есть способов расставить их в ряд?

29. Слово (4–6 кл.)

Сколько есть способов переставить буквы в слове СЛОВО? (В результате не обязательно должно получиться что-то осмысленное.)

30. Легальный чит (4–6 кл.)

Учительница дала детям карточки с цифрами 6, 7, 8, 9 и спросила, сколько чисел можно составить из них (использовать все карточки обязательно). Злата занимается в математическом кружке и знает, что цифры 6 и 9 можно переворачивать. Сколько вариантов получилось у Златы?

31. Двусторонняя фиксация (4–6 кл.)

Сколько существует различных четырёхзначных чисел таких, что сумма первых трёх цифр этого числа равна 20, а сумма последних трёх — 17? Число не может начинаться с 0.

32. Числа и слова (4–6 кл.)

Сколько существует трёхзначных чисел, в словесной записи которых ровно два слова, а первая цифра равна 1?

33. Круглое произведение (5–6 кл.)

Найдите все трёхзначные числа ABC , в которых все цифры различны и не равны нулю, а число $ABC \cdot AB \cdot A$ делится на 1000.

34. Числа из карточек (5–6 кл.)

На карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6. Из этих шести карточек составили три двузначных числа: A , B и C . Известно, что $A = 2B$ и $B + C = 58$. Какие числа составили? (Цифру 6 не переворачивают.)

35. Контрасты (5–6 кл.)

В таблице 3×3 каждая клетка покрашена чёрным или белым цветом. Если клетка белая, то у неё больше чёрных соседей (по стороне), чем белых, а если клетка чёрная — то наоборот. Сколько существует способов такой раскраски? Способы, отличающиеся поворотом доски, считаются разными.

36. Ход королём (5–6 кл.)

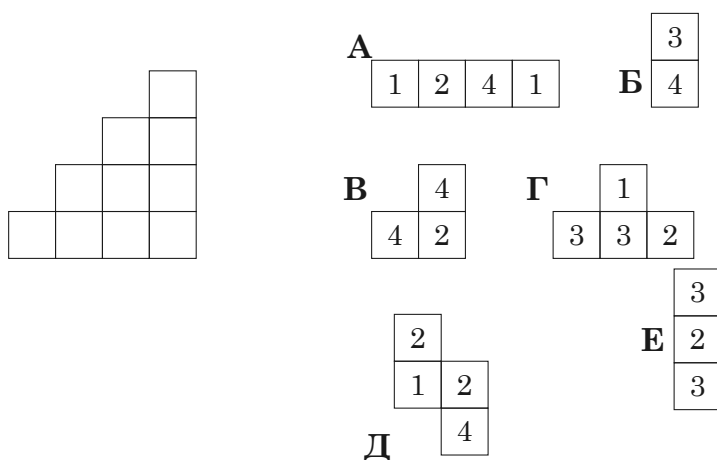
Сколькими способами шахматный король может попасть из левого нижнего угла доски 6×7 (6 строк и 7 столбцов) в правый верхний угол, сделав 6 ходов?

37. Состав числа (5–6 кл.)

На доске написано число 0. Маленький мальчик умеет прибавлять и вычитать по 1, но он не знает отрицательных чисел. Ему нужно получить 0, совершив десять таких операций. Сколькими различными способами он может это сделать?

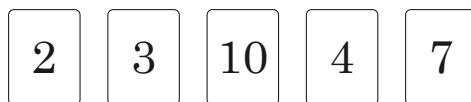
38. Лесенка с числами (5–6 кл.)

Миша сложил из некоторых фигур, обозначенных на рисунке А, Б, В, Г, Д и Е, фигуру в форме лесенки. Сумма чисел в этой лесенке оказалась равна 25. Фигуры под какими буквами использовал Миша?

**39. Карточки с числами** (5–6 кл.)

Петя написал на каждой из пяти карточек по одному числу с каждой стороны. Причём число на одной стороне карточки в два раза больше или меньше числа на второй стороне. Петя выложил карточки так, как показано на рисунке, и посчитал, что сумма всех чисел на обеих сторонах карточек равна 75.

Какие числа написаны на обратных сторонах карточек?

**40. Загадочное число** (5–6 кл.)

Никита составил из карточек с цифрами число и сообщил про него:

1. Все цифры на карточках в моём числе различны.
2. Используя эти карточки, всего можно составить шесть различных двузначных чисел.
3. Если сложить эти шесть двузначных чисел, то половина полученной суммы будет равна моему числу.

Найдите число, которое составил Никита.

41. Дата-2 (5–6 кл.)

Электронные часы показывают время в 24-часовом формате (ЧЧ:ММ, от 00:00 до 23:59). Сколько минут в сутки часы будут показывать время так, что как минимум три цифры из четырёх на экране одинаковые?

42. Пароль (5–6 кл.)

Пароль содержит 6 или 7 символов. Известно, что пароль обязательно содержит последовательность 2026 (то есть цифры 2, 0, 2, 6 стоят подряд), а остальные символы — некоторые из букв *a*, *b* и *c*, причём буквы не повторяются.

Сколько нужно сделать попыток, чтобы гарантированно подобрать верный пароль?

43. Конструктор (5–6 кл.)

У Коли есть 10 палочек длиной 1, 1, 2, 4, 4, 4, 5, 5, 10, 10. Он сложил из них два треугольника и прямоугольник, у которых нет общих точек.

Какое самое большое значение может принимать площадь прямоугольника?

44. Цепочки вычислений (5–6 кл.)

Стартуя с числа 2, Федя выполнил последовательно в некотором порядке пять операций: -1 , $+1$, $+2$, $\times 2$, $\times 3$. Получилась цепочка из шести чисел, среди которых есть числа 7 и 9.

Каких чисел от 1 до 10 не могло быть в этой цепочке?

45. Куб из кубиков (6 кл.)

Из четырёх белых и четырёх синих кубиков размером $1 \times 1 \times 1$ составлен куб $2 \times 2 \times 2$. Сколькими способами это можно сделать? Способы, отличающиеся друг от друга поворотом, считаются одинаковыми.

46. Стиратель-Памяти-Инатор (6 кл.)

У Фуфелшмерца есть сколько угодно автоматических нажимателей, кнопок самоуничтожения и кнопок, которые заставляют всех жителей Триштатья забыть, зачем они только что зашли в комнату. Он хочет установить по одной кнопке в каждой из четырёх вершин квадратного Инатора. Сколько есть способов это сделать, если автоматический нажиматель и кнопка самоуничтожения ни в коем случае не должны стоять рядом?

47. Пакость-Инаторы (6 кл.)

Для захвата Триштатья Фуфелшмерц придумал 8 уникальных злодейских пакостей и собрал Инаторы с ними. В каждом Инаторе ровно 4 разные пакости. Но возникла проблема, из-за которой пришлось забраковать часть Инаторов: пакость «Кнопка самоуничтожения» и пакость «Автоматический нажиматель кнопок» категорически не сочетаются. Если установить их в один Инатор, он взрывается ещё на этапе сборки.

Все Инаторы Фуфелшмерц хранит в тёмном чулане, в котором, как назло, перегорела лампочка, и их приходится вытаскивать не глядя. Фуфелшмерцу нужен

Инатор с пакостью «Сыр с плесенью».

Какое наибольшее количество Инаторов ему придётся вытащить, пока не попадётся нужный?

48. Восстановить число (6 кл.)

Придумайте какое-нибудь трёхзначное число, меньшее 500, у которого ровно 10 делителей.

49. Фигуры в мешке (4–6 кл.)

В мешке есть треугольники, квадраты и кружки. Каждая фигура бывает белого, красного, синего, зелёного или чёрного цвета. Какое наименьшее количество фигурок нужно вытянуть вслепую, чтобы среди них гарантированно оказались 3 одинаковые фигурки (и по форме, и по цвету)?

50. Периметр и площадь (5–6 кл.)

Сколько существует прямоугольников, длины сторон которых выражаются целыми числами сантиметров, если их периметр равен 40 см, а площадь не превосходит 75 см^2 ? Прямоугольники, отличающиеся только поворотом, считаются одинаковыми.

8. Ответы

1. **Игрушечная расстановка.** а) 120; б) 48.
2. **Ритуалы.** а) 24; б) 9; в) 26.
3. **Числа по кругу.** 8 способов.
4. **Несколько простых вопросов.** А) 120; Б) 12; В) 8; Г) 3.
5. **Лесенки.** 9 лесенок.
6. **Ближайшая дата.** 28.06.2027.
7. **Купюры.** 18 способов.
8. **Уменьшить сумму.** 36 способов.
9. **Маршруты.** а) 3; б) 6; в) 7; г) 13; д) 15; е) 16.
10. **Разрезания.** 32 способа.
11. **Комб-Инатор.** 48 паролей.
12. **Витрина.** 60 способов.
13. **Хоровод.** 120 дней.
14. **Ссора.** 72 способа.
15. **Парк развлечений.** 47 способов.
16. **Нейтралитет.** а) 144; б) 72.
17. **Волшебная лавка.** 646 способов.
18. **Шотландия.** 400 способов.
19. **Трансформация.** 24.
20. **Самая простая раскраска.** 16 способов.
21. **Нарядно.** 18 способов.
22. **Как устроен забор.** $2025^2 = 4\,100\,625$ дырок.
23. **Убрать лишнее.** 45 чисел.
24. **Убыватели.** 120 чисел.
25. **Задачи про числа.** а) 120; б) 96; в) 72; г) 630; д) 49.
26. **Тысяча и один куб.** а) 384; б) 488.
27. **Числа с повторами.** 262 числа.
28. **Идеальная мизансцена.** а) 144; б) 72.
29. **Слово.** 60 способов.
30. **Легальный чит.** 48 вариантов.
31. **Двусторонняя фиксация.** 35 чисел.
32. **Числа и слова.** 27 чисел.
33. **Круглое произведение.** 875.
34. **Числа из карточек.** $A = 26, B = 13, C = 45$.

- 35. **Контрасты.** 2 раскраски.
- 36. **Ход королём.** 6 способов.
- 37. **Состав числа.** 42 способа.
- 38. **Лесенка с числами.** Б, Г и Д.
- 39. **Карточки с числами.** 1, 6, 20, 8 и 14 соответственно.
- 40. **Загадочное число.** 198.
- 41. **Дата-2.** 79 минут.
- 42. **Пароль.** 42 попытки.
- 43. **Конструктор.** 10 квадратных единиц.
- 44. **Цепочки вычислений.** 4, 5 и 10.
- 45. **Куб из кубиков.** 7 способов.
- 46. **Стиратель-Памяти-Инатор.** 35 способов.
- 47. **Пакость-Инаторы.** 26 Инаторов.
- 48. **Восстановить число.** Например, 112.
- 49. **Фигуры в мешке.** 31 фигурку.
- 50. **Периметр и площадь.** 5 прямоугольников.