

# СВОЙСТВА СТЕПЕНЕЙ

## Классная работа

### 1 Разминка.

- 1) Что является квадратом, но не кубом натурального числа?  
(А)  $8^2$  (Б)  $5^5$  (В)  $2^{12}$  (Г)  $4^4$  (Д)  $3^3$
- 2) Положительные числа  $a, b$  и  $c$  таковы, что  $a^3 = b^4$  и  $b^2 = c^3$ .  
Тогда  
(А)  $a = c^2$  (Б)  $a^2 = c^3$  (В)  $a^2 = c$  (Г)  $a^3 = c^2$  (Д)  $a = c$
- 3) Известно, что сумма  $8+8+\dots+8$  равна  $4^{27}$ . Сколько слагаемых в этой сумме?
- 4) В какую степень надо возвести  $4^4$ , чтобы получить число, равное  $8^8$ ?

### 2 Теория. Свойства степеней.

### 3 Упростите выражение:

а)  $A = \frac{2^{201} \cdot 7^{101}}{6 \cdot 28^{100}}$ ; б)  $B = \frac{(-15^2)^3 \cdot (-2^3)^4}{(-6^3)^2 \cdot (-5^2)^3}$ .

### 4 Упростите выражение: а) $\frac{3^{15} - 3 \cdot 27^4}{3^9 \cdot 6^4}$ ; б) $\frac{(4 \cdot 5^{19} + 3 \cdot 125^6) \cdot 46^2}{(23 \cdot 25^3)^3}$ .

### 5 Вычислите расстояние между точками $A(a)$ и $B(b)$ на координатной прямой, если

$$a = \frac{-14^2 \cdot 25^3}{49 \cdot (-10)^6}; \quad b = \frac{7^{40} + 7^{38} - 2 \cdot 7^{39}}{6^2 \cdot 49^{19}}$$

### 6 Пусть $n$ — некоторое натуральное число. Упростите:

$$(3^{3n+1} - 4 \cdot 3^{3n+2})(7 \cdot 2^n + 2^{n+1}) : 54^{n+1}$$

## Решения классной работы

### 1 Разминка.

1) Поиск числа, являющегося квадратом, но не кубом.

$$(A) 8^2 = (2^3)^2 = 2^6 = (2^2)^3 \text{ — и квадрат, и куб.}$$

$$(B) 5^5 \text{ — степень не делится ни на 2, ни на 3.}$$

$$(B) 2^{12} = (2^6)^2 = (2^4)^3 \text{ — и квадрат, и куб.}$$

$$(Г) 4^4 = (2^2)^4 = 2^8 = (2^4)^2. \text{ Степень 8 делится на 2, но не на 3.}$$

Ответ: (Г)

2) Связь между  $a$  и  $c$ .

$$a^3 = b^4 \implies b = a^{3/4}$$

$$b^2 = c^3 \implies (a^{3/4})^2 = c^3 \implies a^{3/2} = c^3$$

$$\text{Возведем в степень } 2/3: a = c^2$$

Ответ: (А)

3) Обозначим количество слагаемых  $x$ .

$$8 \cdot x = 4^{27} \implies 2^3 \cdot x = (2^2)^{27} = 2^{54}$$

$$x = 2^{54}/2^3 = 2^{51}$$

Ответ:  $2^{51}$

4) Обозначим искомую степень  $x$ .

$$(4^4)^x = 8^8 \implies (2^8)^x = (2^3)^8 \implies 2^{8x} = 2^{24}$$

$$8x = 24 \implies x = 3$$

Ответ: 3

### 2 Свойства степеней:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}; \quad a^n / a^m = a^{n-m};$$

$$(a^n)^m = a^{nm}; \quad (ab)^n = a^n \cdot b^n.$$

Отдельное внимание нужно уделять знакам:

$$-a^2 \text{ и } (-a)^2 \text{ - разные выражения. Также, например, } (-a^2)^3 = -a^6, \text{ но } (-a^3)^2 = a^6.$$

### 3 Упрощение выражений

$$а) A = \frac{2^{201} \cdot 7^{101}}{6 \cdot 28^{100}} = \frac{2^{201} \cdot 7^{101}}{2 \cdot 3 \cdot (2^2 \cdot 7)^{100}} = \frac{2^{201} \cdot 7^{101}}{3 \cdot 2^{201} \cdot 7^{100}} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$$

$$б) B = \frac{(-15^2)^3 \cdot (-2^3)^4}{(-6^3)^2 \cdot (-5^2)^3}$$

Определим знак выражения:  $(-15^2)^3 < 0$ ;  $(-2^3)^4 > 0$ ;  $(-6^3)^2 > 0$ ;  $(-5^2)^3 < 0$ .

Числитель  $> 0$ , знаменатель  $< 0$ . Дробь  $> 0$ .

$$B = \frac{15^6 \cdot 2^{12}}{6^6 \cdot 5^6} = \frac{3^6 \cdot 5^6 \cdot 2^{12}}{2^6 \cdot 3^6 \cdot 5^6} = \frac{2^{12}}{2^6} = 2^6 = 64$$

### 4 Упрощение дробей

$$а) \frac{(3^{15} - 3 \cdot 27^4)}{(3^9 \cdot 6^4)} = \frac{(3^{15} - 3 \cdot (3^3)^4)}{3^9 \cdot 2^4 \cdot 3^4} = \frac{3^{15} - 3^{13}}{(2^4 \cdot 3^{13})} = \frac{3^{13} \cdot (3^2 - 1)}{16 \cdot 3^{13}} = \frac{8}{16} = 0,5.$$

$$б) \frac{(4 \cdot 5^{19} + 3 \cdot 125^6) \cdot 46^2}{(23 \cdot 25^3)^3}$$

Числитель:  $(4 \cdot 5^{19} + 3 \cdot 5^{18}) \cdot (2 \cdot 23)^2 = 5^{18} \cdot (20 + 3) \cdot 4 \cdot 23^2 = 23^3 \cdot 4 \cdot 5^{18}$

Знаменатель:  $(23 \cdot 5^6)^3 = 23^3 \cdot 5^{18}$

Ответ: 4

### 5 Расстояние между точками $|a - b|$

$$a = \frac{-14^2 \cdot 25^3}{49 \cdot (-10)^6} = \frac{-2^2 \cdot 7^2 \cdot 5^6}{7^2 \cdot 2^6 \cdot 5^6} = -4/64 = -1/16$$

$$b = \frac{7^{40} + 7^{38} - 2 \cdot 7^{39}}{36 \cdot 49^{19}} = \frac{7^{38} \cdot (7^2 + 1 - 14)}{36 \cdot 7^{38}} = (49 + 1 - 14)/36 = 36/36 = 1$$

Расстояние:  $|1 - (-1/16)| = 1 + 1/16 = 17/16$

**6** Упрощение с переменной  $n$

Выражение: 
$$\frac{(3^{3n+1} - 4 \cdot 3^{3n+2}) \cdot (7 \cdot 2^n + 2^{n+1})}{54^{n+1}}$$

1 скобка:  $3^{3n+1} \cdot (1 - 4 \cdot 3) = -11 \cdot 3^{3n+1}$

2 скобка:  $2^n \cdot (7 + 2) = 9 \cdot 2^n = 3^2 \cdot 2^n$

Числитель:  $-11 \cdot 3^{3n+3} \cdot 2^n$

Знаменатель:  $(2 \cdot 3^3)^{n+1} = 2^{n+1} \cdot 3^{3n+3}$

Итог: 
$$\frac{(-11 \cdot 2^n)}{2^{n+1}} = -11/2 = -5,5$$

## Домашнее задание

- 1** Подчеркните одной чертой выражения, значения которых неотрицательны при всех допустимых значениях переменных; двумя чертами — выражения, которые могут быть как положительны, так и отрицательны:

$$-x^7 \cdot y^{12}; \quad (-x^2)^3 \cdot (-y^7)^2; \quad -(-x^2(-y^5)^2)^3; \quad \frac{-x^{12}(-y^{12})}{-(-xy^4)^3}$$

- 2** Вычислите:

а)  $\frac{35^6 + 70^6}{13 \cdot 5^6 \cdot 35^6}$ ;      б)  $\frac{3^{43} + 5 \cdot 3^{44} - 2 \cdot 3^{42}}{(9^{11})^2 \cdot 23}$ ;

в)  $\frac{-28 \cdot 4^9 \cdot (-3^4)^3 + 16^5 \cdot 27^4}{12^{10} \cdot 2^3}$ .

- 3** Сравните:

$$A = \frac{2^{201} \cdot 7^{101}}{6 \cdot 28^{100}} \quad \text{и} \quad B = \frac{2^6 \cdot 3^{200}}{3^{203} + 9^{100}}$$

- 4** Докажите, что  $2 \cdot 7^{19} - 27 \cdot 9^{24} + 49^9 - 3^{49}$  делится на 15.

- 5** Упростите выражение:

$$\frac{(2^{2n+2} - 5 \cdot 2^{2n+1}) \cdot (3 \cdot 5^n + 5^{n+1})}{20^{n+1}}$$

- 6** Известно, что  $x^3 \cdot y^2 \cdot z = 2^{28}$ . Найдите значение произведения  $xuz$ , если число  $y$  в два раза больше  $x$ , а число  $z$  в два раза меньше  $x^2y$ .