Удвоение медианы

Классная работа

1 Выпишите номера неверных утверждений:

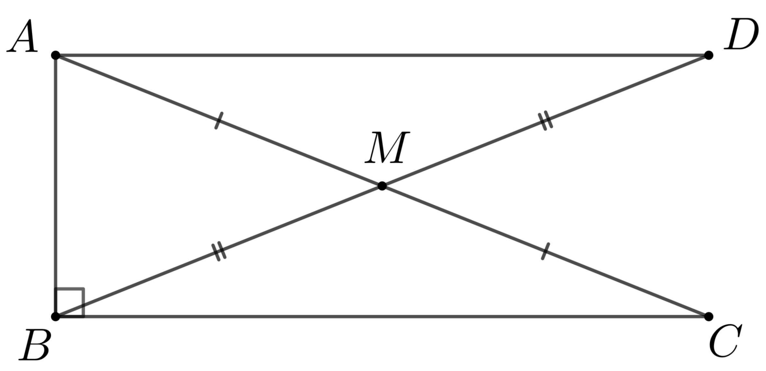
1) Если медиана разбивает треугольник на два треугольника с равными периметрами, то исходный треугольник обязательно является равнобедренным.

2) Длина любой медианы треугольника всегда меньше его полупериметра.

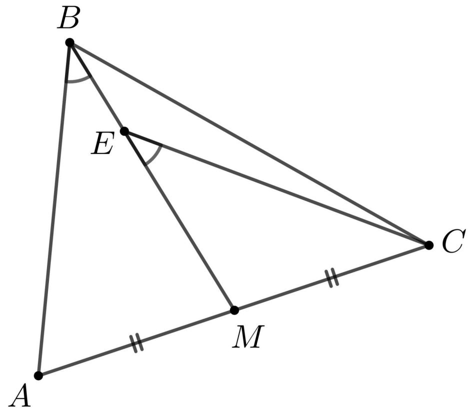
3) В любом треугольнике медиана всегда длиннее высоты, проведённой из той же вершины.

4) Три медианы делят треугольник на шесть треугольников, имеющих равные периметры.

2 Докажите свойство медианы прямоугольного треугольника, пользуясь рисунком. Других дополнительных построений (кроме удвоения медианы) делать не нужно:



3 На медиане BM треугольника ABC взяли точку E так, что угол CEM равен углу ABM. Докажите, что отрезок EC равен одной из сторон треугольника.



4 В треугольнике ABC провели медиану BM. Оказалось, что сумма углов A и C равна углу ABM. Найдите отношение медианы BM к стороне BC.

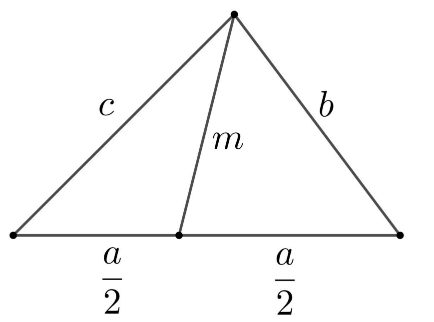
5 В треугольнике ABC медиана BM в 2 раза меньше стороны AB и образует с ней угол $40°$. Найдите угол ABC.

6 В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CD из вершины прямого угла. На сторонах AC и BC отмечены точки E и F соответственно так, что $CE = BF$. Докажите, что треугольник DEF прямоугольный и равнобедренный.

Решения классной работы

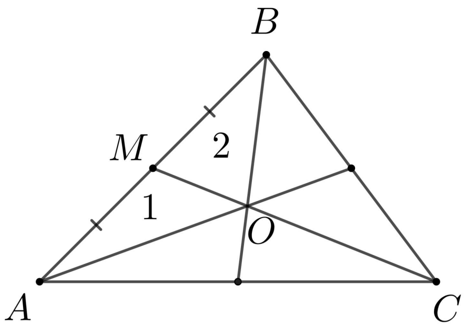
$\boxed{\mathbf{1}}$ 1) Верно.

2) Верно. Док-во:
В левом $\triangle$ $m < c + \dfrac{a}{2}$ (нер-во $\triangle$).
Аналогично в правом $\triangle$ $m < b + \dfrac{a}{2}$.
Сложим неравенства: $2m < a + b + c \Rightarrow$
$m < \dfrac{P}{2}$

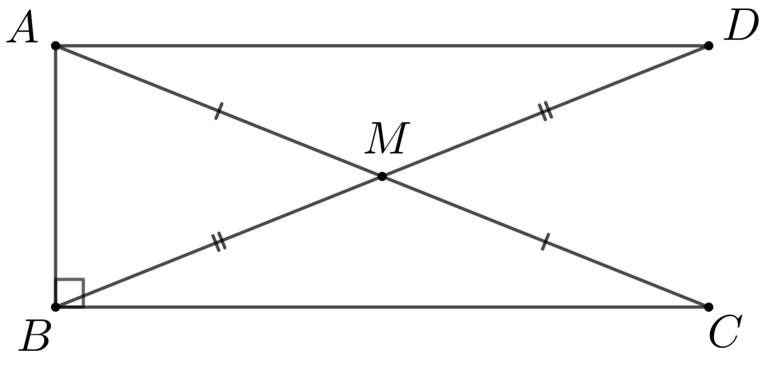


3) Неверно. В прямоугольном треугольнике медиана может совпадать с высотой (и быть равна ей).

4) Неверно. Док-во:
Пусть периметры треугольников 1 и 2 равны. Тогда $AO = OB$. Тогда $\triangle AOB$ р/б и OM — высота. Тогда CM также высота, и $\triangle ABC$ р/б.



$\boxed{\mathbf{2}}$ Доказать, что медиана, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна половине гипотенузы.



1) Удвоим медиану BM : $BM = MD$.

2) $\triangle AMD = \triangle BMC$ по I признаку ($AM = MC$ по условию, $BM = MD$ по построению, $\angle AMD = \angle BMC$ по св-ву вертикальных углов). Следовательно, $AD = BC$ и $\angle C = \angle DAC$ как соответственные элементы.

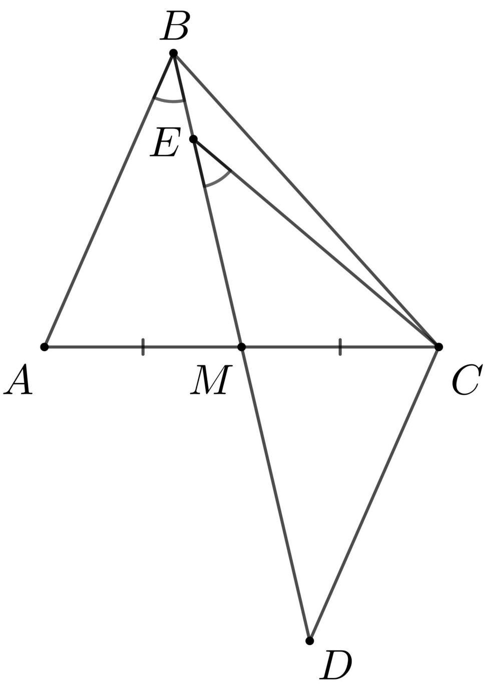
3) В $\triangle ABC$ $\angle C + \angle BAC = 90^\circ$ по св-ву суммы острых углов прямоугольного треугольника. Так как $\angle C = \angle DAC$, то

$$\angle DAC + \angle BAC = 90^\circ \Rightarrow \angle BAD = 90^\circ$$

4) $\triangle BAD = \triangle ABC$ по двум катетам (AB общий, $AD = BC$ по доказанному). Следовательно, гипотенузы AC и BD равны. Значит,

$$BM = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AC$$

3 Доказать, что EC равен одной из сторон треугольника ABC.

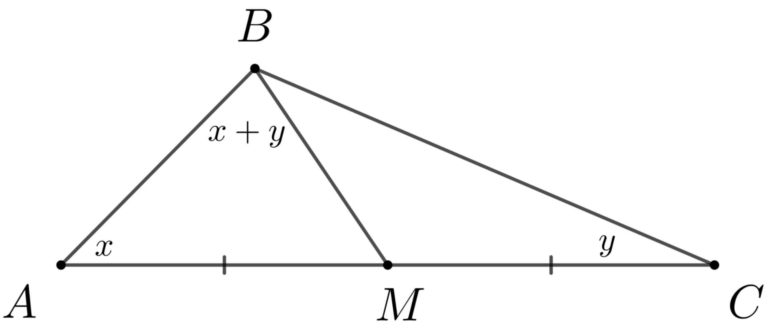


1) Удвоим медиану BM : так, что $BM = MD$.

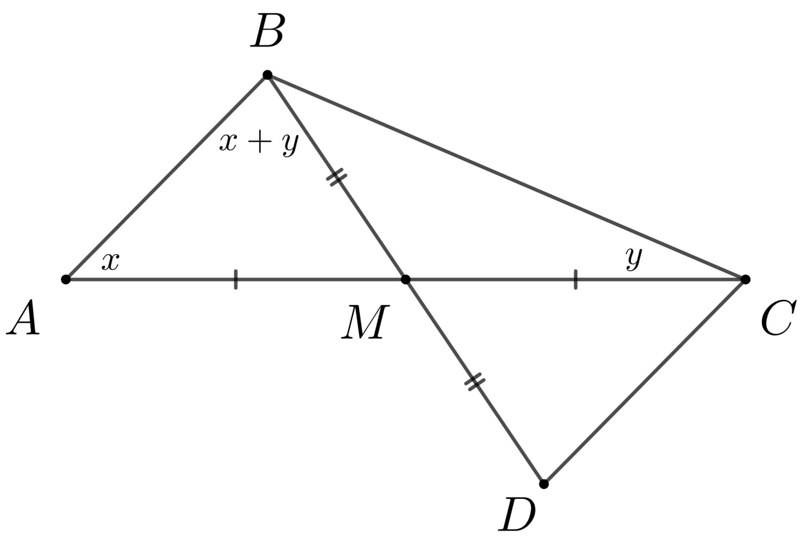
2) $\triangle ABM = \triangle MDC$ по I признаку ($AM = MC$ по условию, $BM = MD$ по построению, $\angle AMB = \angle CMD$). Следовательно, $\angle D = \angle ABM$ и $AB = CD$ как соответственные.

3) $\triangle DCE$ р/б по признаку ($\angle D = \angle ABM$ по доказанному) $\Rightarrow CD = CE \Rightarrow CE = AB$, что и требовалось доказать.

4 Найти $BM : BC$.



1) Удвоим медиану BM так, что $BM = MD$.

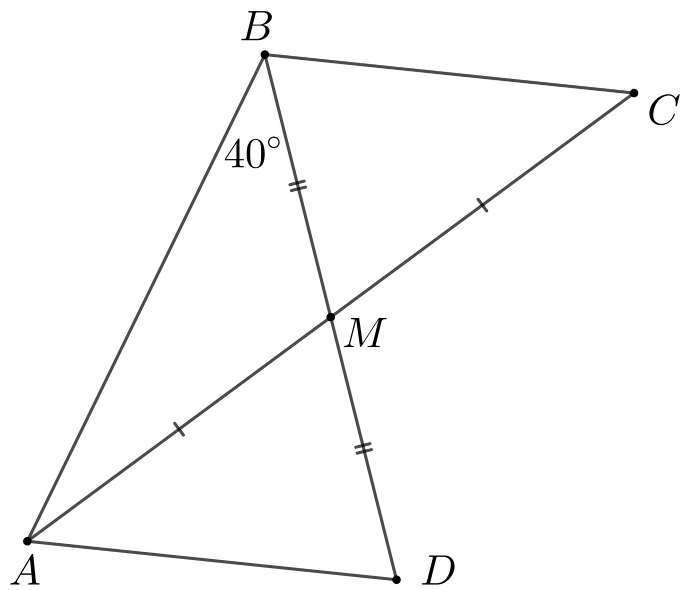


2) $\triangle ABM = \triangle MDC$ по I признаку ($AM = MC$ по условию, $BM = MD$ по построению, $\angle AMB = \angle CMD$). Следовательно, $\angle D = x + y$ и $\angle DCM = x$ как соответственные.

3) В $\triangle BCD$ $\angle D = \angle BCD \Rightarrow$ этот треугольник р/б по признаку и $BD = BC$.

4) $BM = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{1}{2}BC \Rightarrow BM : BC = 1 : 2$.

$\boxed{5}$ BM — медиана, $BM = \dfrac{1}{2}AB$, $\angle ABM = 40°$. Найти $\angle ABC$.



1) Удвоим медиану BM так, что $BM = MD$. Тогда $BD = BA$ и по св-ву р/б треугольника BDA $\angle D = \angle BAD = \dfrac{180° - 40°}{2} = 70°$.

2) $\triangle BMC = \triangle AMD$ (равенство таких треугольников, получившихся в результате удвоения медианы, доказывалось в двух предыдущих задачах) и $\angle CBD = \angle BDA = 70°$.

3) $\angle ABC = 70° + 40° = 110°$.

1) По св-ву углов при основании р/б треугольника ABC $\angle A = \angle B = 45°$.
2) CD — высота р/б треугольника ABC, проведённая к основанию AB, следовательно, по св-ву она является биссектрисой и медианой: $AD = BD$ и $\angle ACD = \angle BCD = 45°$.
3) $\triangle BCD$ р/б по признаку ($\angle B = \angle DCB = 45°$). Следовательно, $BD = CD = AD$.
$\boxed{\mathbf{6}}$ 4) $\triangle ADE = \triangle CDF$ по I признаку ($AE = CF$ как разность равных; $AD = CD$ по доказанному; $\angle A = \angle DCF = 45°$). Значит, $DE = DF$ и $\angle ADE = \angle CDF$ как соответственные элементы.
5) $\angle EDC = \angle FDB$ как разность равных углов. Значит, $\angle EDF = 90°$. Равенство $DE = DF$ доказано в предыдущем пункте. Значит, $\triangle DEF$ — прямоугольный равнобедренный, что и требовалось доказать.