Прямоугольный треугольник-1

Классная работа

1 Найдите верные утверждения:

1) Две высоты треугольника могут пересекаться под прямым углом.

2) Высота, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, разбивает его на два равнобедренных треугольника.

3) Если угол между двумя биссектрисами треугольника равен 45°, то этот треугольник прямоугольный.

2 **Свойство медианы прямоугольного треугольника:** медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, равна её половине.

Альтернативная формулировка. Медиана, проведённая к гипотенузе, разбивает прямоугольный треугольник на два равнобедренных.

3 **Признак прямоугольного треугольника:** если медиана равна половине стороны прямоугольника, к которой она проведена, то этот треугольник прямоугольный.

4 Основание H высоты CH треугольника ABC соединили с серединами M и N сторон AC и BC. Докажите, что периметр четырёхугольника $CMHN$ равен сумме сторон AC и BC.

5 В треугольнике DEF проведена медиана DK. Найдите углы треугольника, если $\angle KDE = 70^\circ$, $\angle DKF = 140^\circ$.

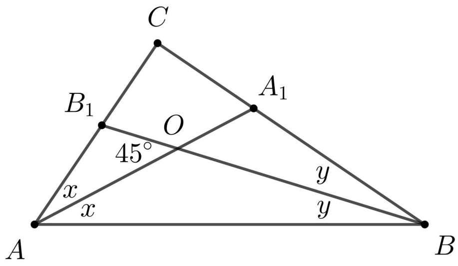
6 В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла проведены высота CH, биссектриса CL и медиана CM. Докажите, что CL — биссектриса угла MCH.

7 В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CH из вершины прямого угла. Из вершины B большего острого угла проведён отрезок BK так, что $\angle CBK = \angle CAB$. Докажите, что CH делит BK пополам.

Решения классной работы

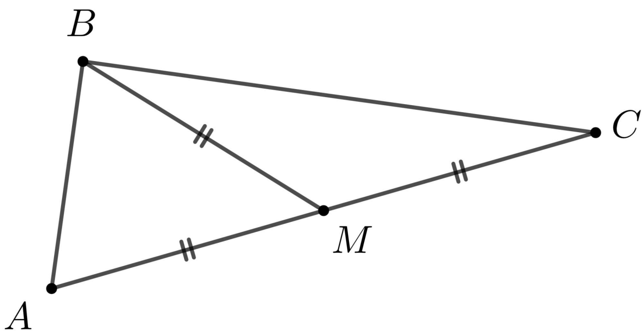
1 Верен только пункт 3. Докажем его (пункты 1 и 2 несложно опровергнуть).

$\angle B_1OA$ — внешний угол $\triangle AOB \Rightarrow$ по св-ву $45° = x + y$.
$\angle A + \angle B = 2x + 2y = 2(x + y) = 2 \cdot 45° = 90°$.
$\angle C = 90° \Rightarrow$ треугольник прямоугольный.



2 Свойство доказано на прошлом уроке (с помощью удвоения медианы).

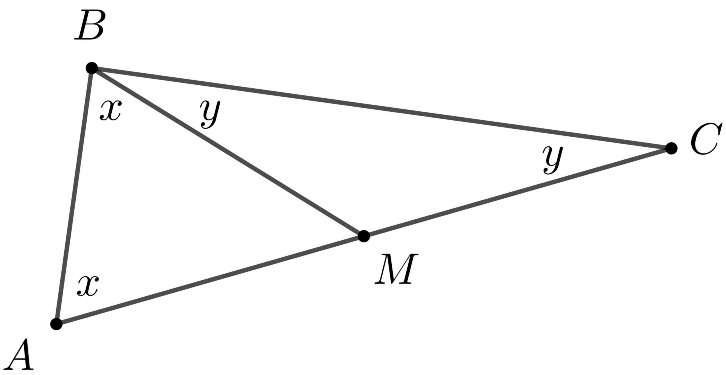
3 $BM = AM = CM$. Доказать: $\angle ABC = 90°$.



1) $\triangle ABM$ — р/б с основанием $AB \Rightarrow$ по св-ву $\angle A = \angle ABM$.

2) Аналогично в р/б $\triangle BMC$ $\angle C = \angle MBC$.

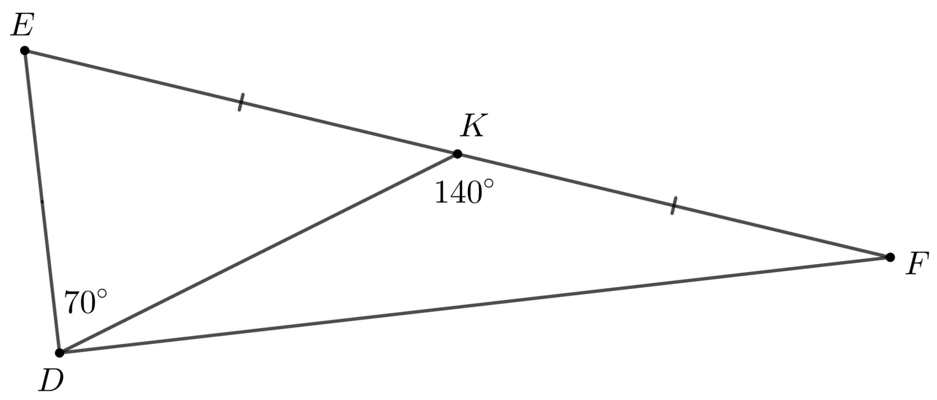
3) Отметим равные углы на рисунке:



В $\triangle ABC$ по теореме о сумме углов треугольника $2x + 2y = 180^\circ \Rightarrow x + y = 90^\circ \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$, что и требовалось доказать.

$\boxed{\mathbf{4}}$ По св-ву медианы, проведённой к гипотенузе прямоугольного треугольника, $HM = AM$ и $HN = BN$. Значит, $AC + BC = HM + MC + CN + NH = P(CMHN)$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Найти углы треугольника FDE:

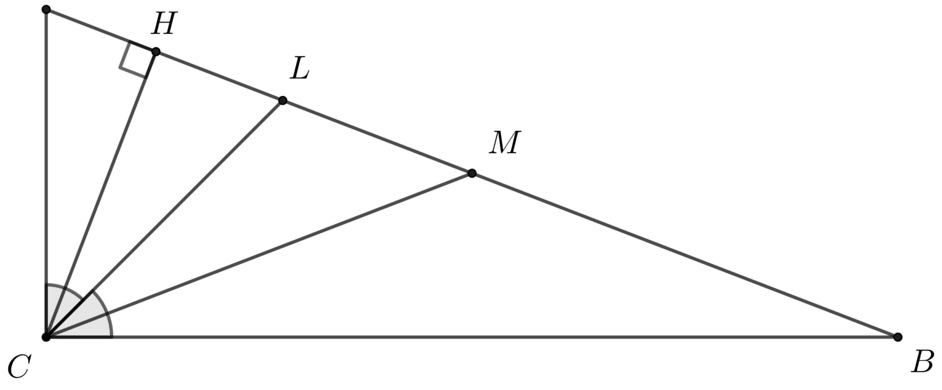


1) $\angle DKF$ — внешний угол $\triangle DKE \Rightarrow$ по св-ву $140^\circ = 70^\circ + \angle E \Rightarrow \angle E = 70^\circ$.

2) $\triangle DKE$ р/б по признаку ($\angle EDK = \angle E$ по доказанному) $\Rightarrow DK = EK = \dfrac{1}{2}EF \Rightarrow \triangle DEF$ прямоугольный по признаку.

3) Углы треугольника FDE равны 90°, 70° и 20°.

$\boxed{\mathbf{6}}$ $\angle C = 90^\circ$, CH — высота, CL — биссектриса, CM — медиана. Доказать, что CL — биссектриса $\angle HCM$.



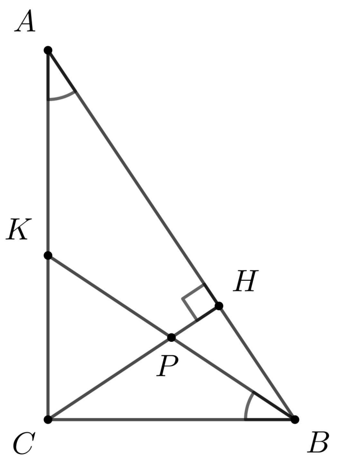
1) По св-ву медианы, проведённой к гипотенузе прямоугольного треугольника, $CM = AM = MB$.

2) $\triangle ACM$ и $\triangle CMB$ — р/б, следовательно, по свойству равны углы при их основаниях. Обозначим градусную меру $\angle B$ x. Тогда $\angle BCM = x$; $\angle ACM = \angle A = 90^\circ - x$.

3) В прямоугольном $\triangle ACH$ $\angle ACH = 90^\circ - (90^\circ - x) = x$.

4) $\angle HCL = 45^\circ - x$; $\angle MCL = 45^\circ - x$. Значит, $\angle HCL = \angle MCL$ и CL — биссектриса $\triangle CHM$, что и требовалось доказать.

$\boxed{\mathbf{7}}$ $\angle C = 90^\circ$. Доказать, что $KP = PB$:



1) Пусть $\angle A = x$. Тогда $\angle ACH = 90^\circ - x$ (сумма углов в прямоугольном треугольнике ACH). $\angle ABC = 90^\circ - x$ (сумма углов в прямоугольном треугольнике ABC). $\angle CBK = x$. $\angle CKB = 90^\circ - x$ (сумма углов в прямоугольном треугольнике CBK).

2) В $\triangle KPC$ равны два угла $\Rightarrow$ $KP = PC$ по признаку р/б треугольника.

3) $\angle BCP = 90^\circ - \angle ACH = 90^\circ - (90^\circ - x) = x$. $\triangle PCB$ р/б по признаку и $PC = PB$.

4) Доказали, что $KP = PC$ и $PC = PB \Rightarrow KP = PB$, что и требовалось доказать.