Множества чисел

Натуральные числа ($\mathbb{N}$)

Числа, которые используются для счета $(1, 2, 3, \dots)$.
Множество натуральных чисел является подмножеством целых чисел ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$).

Целые числа ($\mathbb{Z}$)

Натуральные числа, противоположные им числа и 0 $(-17, 256, -3)$.
Множество целых чисел является подмножеством рациональных чисел ($\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$).

Рациональные числа ($\mathbb{Q}$)

Числа, представимые в виде дроби $\dfrac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное.
Эти числа можно записать в виде конечной десятичной дроби либо в виде бесконечной периодической.
Множество рациональных чисел является подмножеством действительных чисел ($\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$).

Иррациональные числа

Числа, которые нельзя представить в виде $\dfrac{m}{n}$. Это бесконечные непериодические десятичные дроби.
Мы будем рассматривать иррациональные числа, в записи которых есть только квадратные корни.

Действительные числа ($\mathbb{R}$)

Множество действительных чисел = рациональные числа + иррациональные числа.

Запись иррациональных чисел

Иррациональное число (одно число) может выглядеть, например, так:

$$\sqrt{5} \qquad 5\sqrt{2} \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad 5-\sqrt{7} \qquad 10+2\sqrt{5} \qquad \sqrt{2+\sqrt{2}} \qquad \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Как записывают числа с радикалами (корнями):

✓ произведение корней записывают как корень из произведения:

$$\sqrt{5}\cdot\sqrt{7} = \sqrt{5\cdot 7} = \sqrt{35}$$

✓ **из-под корня выносят множитель в чётной степени**

$$\sqrt{160} = \sqrt{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5} = 2\cdot 2\cdot\sqrt{2\cdot 5} = 4\sqrt{10}$$

✗ не оставляют дробь под корнем (нужно преобразовать):

$$\sqrt{0{,}7} = \sqrt{\frac{7}{10}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{10}}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{70}}{10}$$

✗ по возможности избавляются от сложных радикалов (корень под корнем):

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} = |2+\sqrt{3}| = 2+\sqrt{3}$$

Алгоритм выделения полного квадрата см. ниже.

Как выделить полный квадрат в выражении с радикалом

Допустим, нужно преобразовать сложный радикал $\sqrt{22+12\sqrt{2}}$. Попробуем выделить полный квадрат под внешним корнем: $22+12\sqrt{2}=(a+b)^2$.
То есть $22+12\sqrt{2}=a^2+b^2+2ab$. Числа a^2 и b^2 точно не содержат $\sqrt{2}$, значит, должно выполняться:

$$\begin{cases} a^2+b^2=22 \\ 2ab=12\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^2+b^2=22 \\ ab=6\sqrt{2} \end{cases}$$

Как можно разделить на множители произведение $6\sqrt{2}$ (перечислим все способы):
1) $a=1$, $b=6\sqrt{2}$ 2) $a=2$, $b=3\sqrt{2}$ 3) $a=3$, $b=2\sqrt{2}$ 4) $a=6$, $b=\sqrt{2}$.
Проверяем условие $a^2+b^2=22$: равенство верно при $a=2$ и $b=3\sqrt{2}$ (нужно проверять все пары, пока не найдём подходящую).

Значит:

$$\sqrt{22+12\sqrt{2}} = \sqrt{(a+b)^2} = \sqrt{(2+3\sqrt{2})^2} = |2+3\sqrt{2}| = 2+3\sqrt{2}$$

Как сравнить два числа

Сравним $\sqrt{23}-\sqrt{21}$ и $\sqrt{24}-\sqrt{22}$.
Если возвести обе части в квадрат (убедившись сначала, что они положительны), получим $44-2\sqrt{23\cdot 21} \ \vee \ 46-2\cdot\sqrt{24\cdot 22}$.
Даже если упростить, останутся число и два разных радикала, то есть придётся несколько раз возводить в квадрат. Это трудоёмко.
Удобнее перегруппировать слагаемые:

$$\sqrt{23}+\sqrt{22} \ \vee \ \sqrt{24}+\sqrt{21}$$

$$(\sqrt{23}+\sqrt{22})^2 \ \vee \ (\sqrt{24}+\sqrt{21})^2$$

$$45+2\sqrt{23\cdot 22} \ \vee \ 45+2\sqrt{24\cdot 21}$$

При такой группировке целые числа уничтожаются, и нужно сравнить два корня:

$$2\sqrt{23\cdot 22} \ \vee \ 2\sqrt{24\cdot 21}$$

$$23\cdot 22 \ > \ 24\cdot 21 \ \Leftrightarrow \ \sqrt{23}+\sqrt{22} > \sqrt{24}+\sqrt{21} \ \Leftrightarrow \ \sqrt{23}-\sqrt{21} \ > \ \sqrt{24}-\sqrt{22}$$