Тренировочный экзамен по алгебре в 8-ом математическом классе.
май 2026

180 минут

1 а) Упростить выражение:

$$\frac{\left(\frac{x\sqrt{x}-27}{\sqrt{x}-3}+3\sqrt{x}\right)\cdot\left(\frac{x\sqrt{x}+27}{\sqrt{x}+3}-3\sqrt{x}\right)-81}{x}\cdot\frac{2x-1}{x-18}-\frac{x^2-16}{x+4}$$

б) Найдите значение выражения при: 1) $x=25$; 2) $x=-4$; 3) $x=(-\frac{5}{6})^{-2}$.

2 Сравните числа:

$$a=(3-\sqrt{5})^2\cdot(14+6\sqrt{5})-2\sqrt{42\frac{1}{4}}$$

$$b=\sqrt{28-10\sqrt{3}}-\sqrt{28+10\sqrt{3}}$$

3 Решите уравнения:

а) $\dfrac{1}{3x+5}-\dfrac{3}{x^2-4}-\dfrac{9}{10+x-3x^2}=0$;

б) $(x^2-4x+3)\cdot(x^2-6x+8)-6\cdot(x^2-5x)-24=0$.

4 Решите неравенство:

а) $\dfrac{2x-5}{x-6}\geq\dfrac{3}{x-2}$;

б) $|x-4|\leq x^2-8x+4$;

в) $x^2+2x<\dfrac{24}{x^2+2x-2}$.

5 Решите неравенство:

$$\frac{(\sqrt{x+5})^2(x^2+8x+12)(x^2+3x-18)(3x+6)}{(9-x^2)(2x-5-x^2)}\geq 0$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ При прокладке двух параллельных трубопроводов работали два экскаватора. Первый из них начал работать на 40 минут раньше второго. Когда второй экскаватор прокопал 36 метров, оказалось, что он отстает от первого на 1 метр. С какой скоростью работали экскаваторы, если известно, что второй выкапывает в час на 5 метров больше, чем первый?

$\boxed{\mathbf{7}}$ 1) Постройте график функции $f(x) = 2x|x+2| - \dfrac{x^3}{x} - 6x$.

2) Укажите область определения функции и промежутки её возрастания и убывания.

3) При каких a уравнение $f(x) = a$ имеет ровно два решения?

$\boxed{\mathbf{8}}$ При каких a область определения функции

$$y = \sqrt{(2a-x)(x-4a)} + \sqrt{x^2 - 2x - 24}$$

состоит из единственной точки?

$\boxed{\mathbf{9}}$ Решите одно из заданий по выбору:
1) a, b и c — длины сторон треугольника. Решите неравенство:

$$x^2 + 2(b-c)x + a^2 > 0$$

2) Составьте уравнение какого-нибудь приведенного квадратного трёхчлена $y = x^2 + px + q$, график которого пересекает оси координат в вершинах треугольника площади 24.

Решения

$\boxed{\mathbf{1}}$ а) ОДЗ: $x > 0 x \neq -4;\ x \neq 0;\ x \neq 18 \Rightarrow x > 0, x \neq 18.$

Упростим первую скобку в числителе:

$$\frac{x\sqrt{x}-27}{\sqrt{x}-3}+3\sqrt{x}=\frac{(\sqrt{x}-3)(x+3\sqrt{x}+9)}{\sqrt{x}-3}+3\sqrt{x}=$$
$$=x+3\sqrt{x}+9+3\sqrt{x}=(\sqrt{x}+3)^2$$

Аналогично преобразуем вторую скобку и получим $(\sqrt{x}-3)^2$.

Сборка выражения:

$$(\frac{(\sqrt{x}+3)^2\cdot(\sqrt{x}-3)^2-81}{x}\cdot\frac{2x-1}{x-18}-(x-4)=\frac{x^2-18x}{x}\cdot\frac{2x-1}{x-18}-x+4=$$

$$=2x-1-x+4=x+3$$

б) 1) $x=25 \Rightarrow$ значение выражения равно 4.

2) $x=-4 \Rightarrow$ выражение не имеет смысла.

3) $x=\left(-\dfrac{5}{6}\right)^{-2}=\dfrac{36}{25} \Rightarrow$ значение выражения равно $4\dfrac{11}{25}=4{,}44$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ $a=(14-6\sqrt{5})(14+6\sqrt{5})-2\sqrt{\dfrac{169}{4}}=196-180-13=3.$

$b=\sqrt{(5-\sqrt{3})^2}-\sqrt{(5+\sqrt{3})^2}=5-\sqrt{3}-(5+\sqrt{3})=-2\sqrt{3}.$

$a>0, b<0 \Rightarrow a>b.$

$\boxed{\mathbf{3}}$ а)

$$\frac{1}{3x+5}-\frac{3}{x^2-4}-\frac{9}{10+x-3x^2}=0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3x+5}-\frac{3}{(x-2)(x+2)}+\frac{9}{(x-2)(3x+5)}=0$$

ОДЗ: $x \notin \left\{2, -2, -\frac{5}{3}\right\}$.

$$(x^2-4)-3(3x+5)+9(x+2)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{-1, 1\}$$

б)

$$(x^2-4x+3)(x^2-6x+8)-6(x^2-5x)-24=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (x^2-5x+4)(x^2-5x+6)-6(x^2-5x)-24=0$$

Замена $t = x^2 - 5x$:

$$(t+4)(t+6)-6t-24=0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2+4t=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2-5x=0 \\ x^2-5x+4=0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{0, 1, 4, 5\}$$

.

$\boxed{4}$ а) $\dfrac{2x-5}{x-6} \geq \dfrac{3}{x-2} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{2x^2-12x+28}{(x-6)(x-2)} \geq 0$

Числитель всегда положителен ($D < 0$, оси параболы направлены вверх.) Поэтому неравенство равносильно следующему:

$$(x-6)(x-2) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$$

б) $|x-4| \leq x^2-8x+4 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-4 \leq x^2-8x+4 \\ x-4 \geq -x^2+8x-4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^2-9x+8 \geq 0 \\ x^2-7x \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, 0] \cup [8, +\infty)$$

в) $x^2+2x < \dfrac{24}{x^2+2x-2}$

Замена $t = x^2 + 2x$:

$$t < \frac{24}{t-2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(t-6)(t+4)}{t-2} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad t \in (-\infty, -4) \cup (2, 6).$$

Возвращаемся к переменной x:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + 2x + 4 < 0 \\ \begin{cases} x^2 + 2x - 2 > 0 \\ x^2 + 2x - 6 < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$x \in (-1-\sqrt{7}, -1-\sqrt{3}) \cup (-1+\sqrt{3}, -1+\sqrt{7})$

5

$$\frac{(\sqrt{x+5})^2(x^2+8x+12)(x^2+3x-18)(3x+6)}{(9-x^2)(2x-5-x^2)} \geq 0$$

ОДЗ: $x \geq -5, x \neq \pm 3$.

$$\frac{3(x+5)(x+2)^2(x+6)^2}{(x+3)(x^2-2x+5)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{x+5}{x+3} \geq 0 \\ x = -2 \\ x = -6 \end{array}\right.$$

С учетом ОДЗ и нулей числителя: $x \in \{-5\} \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$.

6 Пусть скорость работы первого экскаватора равна v_1 м/ч. Тогда скорость второго $v_1 + 5$ м/ч.

К тому моменту, как второй вскопал 36 м, первый всекопал на 1 м больше, то есть 37 м.

Второй работал $\dfrac{36}{v_1+5}$ ч, первый $\dfrac{37}{v_1}$.

Так как второй работал на 40 минут меньше, составим уравнение:

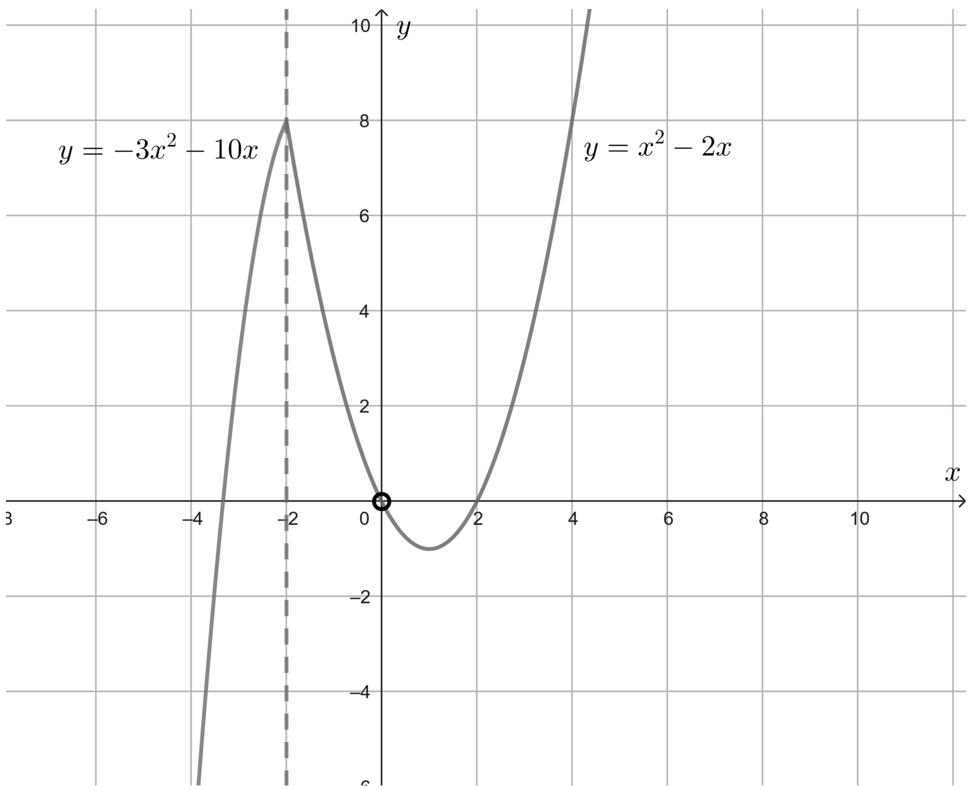
$$\frac{37}{v_1} - \frac{36}{v_1+5} = \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 2v_1^2 + 7v_1 - 555 = 0$$

$v_1 = 15 \Rightarrow v_2 = 20.$

Ответ: 15 м/ч, 20 м/ч.

$\boxed{\mathbf{7}}$ 1) $f(x) = 2x|x+2| - \dfrac{x^3}{x} - 6x$, $D(f): x \neq 0$.

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2 - 10x, & x < -2 \\ x^2 - 2x, & x \geq -2, x \neq 0 \end{cases}$$



2) $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Возрастает: $(-\infty, -2]$ и $[1, +\infty)$. Убывает: $[-2, 0)$ и $(0, 1]$.

3) $a \in \{-1, 0, 8\}$.

$\boxed{\mathbf{8}}$ ОДЗ: $\begin{cases} (x-2a)(x-4a) \leq 0 \\ x \in (-\infty, -4] \cup [6, +\infty) \end{cases}$

Второй корень даёт ограничение $x \in (-\infty, -4] \cup [6, +\infty)$.

Первый корень даёт отрезок с концами в точках $2a$ и $4a$.

1) Если $2a < 4a$ (то есть $a > 0$), то $x \in [2a; 4a]$. Этот отрезок имеет единственную общую точку с $x \in (-\infty, -4] \cup [6, +\infty)$ в

двух случаях: $2a = -4,\ 4a < 6$ или $4a = 6,\ 2a > -4$. Пересекая эти условия с условием $a > 0$, получим $a = 1{,}5$.

2) Если $4a < 2a$ (то есть $a < 0$), то $x \in [4a; 2a]$. Этот отрезок имеет единственную общую точку с $x \in (-\infty, -4] \cup [6, +\infty)$ в двух случаях: $4a = -4,\ 2a < 6$ или $2a = 6,\ 4a > -4$. Пересекая эти условия с условием $a < 0$, получим $a = 1{,}5$.

При $a = -1$: отрезок $[-4, -2]$ пересекается с ОДЗ только в точке $x = -4$.

При $a = 1{,}5$: отрезок $[3, 6]$ пересекается с ОДЗ только в точке $x = 6$.

Ответ: $a \in \{-1; 1{,}5\}$.

9 1) $x^2 + 2(b-c)x + a^2 > 0$

$\dfrac{D}{4} = (b-c)^2 - a^2 = (b-c-a)(b-c+a) < 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$.

2) Общая формула приведённого квадратного трёхчлена

$$y = x^2 + px + q$$

Этот график пересекает оси в точках $(x_1; 0),\ (x_2; 0),\ (0, y(0))$.

Площадь треугольника $\dfrac{1}{2} \cdot |x_1 - x_2| \cdot |y(0)|$.

$x_1 = \dfrac{-p + \sqrt{D}}{2};\ x_2 = \dfrac{-p - \sqrt{D}}{2};\ |x_1 - x_2| = \sqrt{D} = \sqrt{p^2 - 4q}$.

$y(0) = q$.

$S = \dfrac{1}{2}|q| \cdot \sqrt{p^2 - 4q} = 24$.

Площадь треугольника, образованного точками пересечения с осями:

Подставим какое-нибудь значение q. Например, при $q = -8$: $\sqrt{p^2 + 32} \cdot 4 = 24 \Rightarrow p^2 = 4 \Rightarrow p = \pm 2$.

Ответ: например, $y = x^2 + 2x - 8$.